Se donner à ~~cœur~~ corps joie aux mathématiques !

Caroline Bardini
Cristina Sabena
Laboratoire de recherche en sémiotique culturelle et pensée mathématique
Université Laurentienne

Conséquence, sans doute de l'influence de Piaget, depuis le siècle dernier, les études de psychologie ont reconnu l'importance du rôle du langage et de l'activité kinesthésique dans l'émergence des savoirs, certains concepts mathématiques élémentaires ayant notamment été perçus comme leur étant intimement liés. Toutefois, les actions corporelles, l'usage d'artefacts (objets, outils technologiques, etc.) et l'activité linguistique furent rarement considérés comme « source directe » de la formation de concepts mathématiques complexes et abstraits. Ce n'est que récemment que certaines recherches[1] ont mis en évidence le rôle primordial et décisif des actions corporelles, des gestes, du langage et de l'usage d'outils technologiques dans la construction des savoirs élémentaires et abstraits chez les élèves, ouvrant ainsi le champ à de nombreuses questions encore inexplorées. Tel est le cas, par exemple, de la question relative à l'étude de la relation entre, d'une part, le mouvement corporel et les activités médiatisées par les artefacts, et d'autre part, les activités linguistiques et symboliques.

Une analyse des liens qui unissent les deux sources de construction de savoirs, c'est-à-dire les actions kinesthésiques et les activités sémiotiques, se révèle indispensable pour mieux cerner à la fois les processus cognitifs généraux et ceux intervenant dans le raisonnement mathématique en particulier. En ce qui concerne, par exemple, le raisonnement algébrique, cela nous amène à nous interroger sur le ou les rôles de l'activité corporelle et

[1] F. Arzarello and O. Robutti, « From body motion to algebra through graphing ». *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, The University of Melbourne, Australia, 2001. R. Nemirovsky, « Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics », *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME27 -PMENA25), 2003.

de la manipulation d'artefacts dans le processus de symbolisation et dans la construction du sens des symboles chez les élèves.

Cette dernière question fait présentement l'objet d'une recherche en didactique des mathématiques[2] dont nous présenterons ici quelques éléments. Nous nous proposons d'approfondir les résultats d'études précédentes dans lesquelles on examinait le processus dialectique entre les actions des élèves (concrètes ou imaginées), les symboles et les interprétations qu'on y apporte. Plus précisément, il s'agit d'analyser l'articulation des dimensions kinesthésique et sémiotique dans la production du sens mathématique chez les élèves.

En nous appuyant sur des exemples précis de situations en salle de classe observées chez des élèves de 10e année, nous illustrerons différents outils théoriques qui sous-tendent l'analyse des liens entre le mouvement corporel, l'usage d'artefacts (objets, outils technologiques, etc.), la linguistique et l'activité mathématique.

Méthodologie

Cette recherche s'étale sur cinq ans pendant lesquelles les chercheurs et les enseignants ont travaillé conjointement, tout au long de l'année scolaire, afin de concevoir diverses tâches mathématiques. Ces activités privilégient le travail en groupe et réservent un espace important aux discussions et débats entre les élèves eux-mêmes et entre les élèves et l'enseignant[3]. Elles peuvent aussi utiliser différents outils technologiques (calculatrices symboliques, Calculator Based Ranger®[4], etc.). En effet, de tels outils sont particulièrement bien adaptés pour aborder des volets spécifiques de notre problématique (tel est le cas, notamment, du CBR, utilisé pour les problèmes ayant trait aux notions de distance, de temps et de vitesse) et se sont aussi avérés des sources indéniables de motivation pour les élèves.

Afin de tenir compte de la diversité sémiotique des activités, les séances sont filmées, enregistrées et les productions écrites des élèves recueillies. Ces divers supports servent de base à l'analyse didactique et qualitative à propos

[2] Recherche menée par Luis Radford au *Laboratoire de recherche en sémiotique culturelle et pensée mathématique* à l'Université Laurentienne de Sudbury.

[3] L. Radford et S. Demers, *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques.* Ottawa, Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques, 2004.

[4] Le Calculator Based Ranger® (CBR) est un outil conçu pour étudier les objets en mouvement : par l'émission d'ondes, il enregistre les données de sa distance à l'objet vers lequel il est orienté. En reliant le CBR à une calculatrice graphique, il est alors possible d'obtenir des graphiques espace-temps, vitesse-temps, accélération-temps tracés à partir des mesures recueillies.

du rôle que jouent le langage, le son, les gestes et les symboles (graphiques, dessins, etc.) dans la construction du sens.

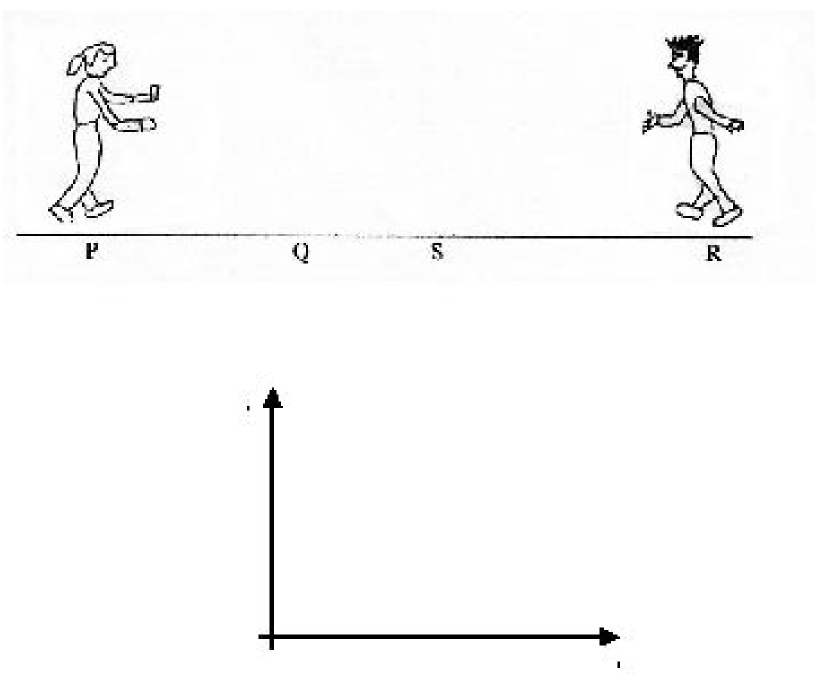
L'activité que nous examinerons ici a été proposée à une classe de 10e année dans un collège du nord de l'Ontario. Elle met en jeu les notions de vitesse, de distance et de temps, et fait appel à l'outil évoqué plus haut, le CBR, dont l'usage est familier aux élèves concernés. Voici un extrait de l'activité.

FIGURE 1

Extrait de l'activité proposée aux élèves de 10e année

Nicolas et Mireille marchent sur une ligne droite. Mireille se déplace du point P au point Q et porte un CBR orienté vers Nicolas. Nicolas part du point R et se dirige vers le point S.

Faites un graphique qui représente la relation entre les variables « t » et « d » où « t » désigne le temps écoulé et « d » la distance entre Mireille et Nicolas.



Question supplémentaire : *Sur le graphique précédent, représentez la relation entre les variables « t » et « d », si on sait que Nicolas s'est arrêté deux secondes au milieu de son parcours. (Distinguez clairement les deux graphiques).*

L'activité est volontairement complexe et ouverte : il n'y a pas une seule réponse exacte, un seul graphique correct. Selon que l'on privilégie certains facteurs, comme le temps ou la vitesse, plusieurs réponses correctes sont plausibles. Notre principal objectif n'est pas ici d'étudier les erreurs des élèves ni les difficultés éprouvées jusqu'à ce qu'ils obtiennent la « bonne réponse ». Il s'agit plutôt d'analyser les démarches qu'ils suivent pour donner du sens à la tâche proposée. En fait, il s'agit d'examiner comment les élèves articulent la situation « concrète » du déplacement, décrite dans l'activité, et sa représentation graphique. Comment choisissent-ils les différents moyens sémiotiques mis à leur disposition pour rendre compte des différentes notions en jeu (déplacement, distance, temps, etc.).

Avant de procéder à l'analyse des données recueillies, nous trouvons important de présenter succinctement notre position théorique générale en ce qui a trait à l'apprentissage des mathématiques.

Les objets mathématiques et le processus d'objectivation

Les objets mathématiques diffèrent des autres. Ils se caractérisent par un haut niveau de généralité et d'abstraction, ce qui les rend difficiles à percevoir. Ce ne sont pas des objets physiques, ils ne peuvent être touchés. De plus, on peut dire qu'ils existent à l'intérieur de théories à partir desquelles ils sont définis. Comment perçoit-on de tels objets? De quelle façon peut-on les apprendre ou les enseigner?

Pour tenter de répondre à ces questions fondamentales, nous nous situons dans une perspective sémiotique et culturelle sous-jacente à l'étude de l'articulation entre les activités kinesthésiques et sémiotiques dans le processus de ce que nous appelons « objectivation[5] ».

Littéralement, « objectiver » signifie « rendre quelque chose apparent » : un aspect d'un objet concret (par exemple sa couleur, sa taille), ou abstrait (par exemple une propriété mathématique). L'acte perceptif de noter se déroule via un processus social médiatisé par une activité « pluri-sémiotique » dans laquelle l'objet visé émerge progressivement. Il s'agit d'un « processus d'objectivation ».

Dans le contexte de l'enseignement, on peut se demander : « Comment les élèves objectivent-ils? Quels moyens mettent-ils en œuvre pour le faire? » Nous tenterons d'apporter quelques réponses à cette question.

---

[5] L. Radford, « The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge » *For the Learning of Mathematics* vol. 22, n°2,:2002, p. 14-23.

Les moyens d'objectivation chez les élèves

En tenant compte de notre cadre théorique et de l'activité mathématique décrite précédemment, nous illustrerons différents moyens d'objectivation susceptibles d'être mis en oeuvre par des élèves dans leurs interactions en salle de classe.

Notre analyse repose sur des productions écrites de trois élèves, sur le *verbatim* de quelques-unes de leurs discussions ainsi que sur des images prises lors de celles-ci. L'extrait cité se déroule au moment où les élèves abordent la question supplémentaire de l'activité : « Sur le graphique précédent, représentez la relation entre les variables « t » et « d », si on sait que Nicolas s'est arrêté deux secondes au milieu de son parcours. Distinguez clairement les deux graphiques »).

1. Z : Donc [...] elle continue à bouger, lui, non ; on peut faire autre chose, on peut utiliser Z (*il inscrit la lettre Z sur le dessin (Figure 6*).
2. C: Yeah.
3. Z : Ok, il rapproche, arrête là pour deux secondes (*son majeur droit parcourt l'espace entre R et Z dessiné sur la feuille, Figure 2a*), elle continue là (*il bouge l'autre main, de P à Q, Figure 2b*), il commence à bouger encore (*avec sa main droite, de Z à S, Figure 2b*).

Figure 2a

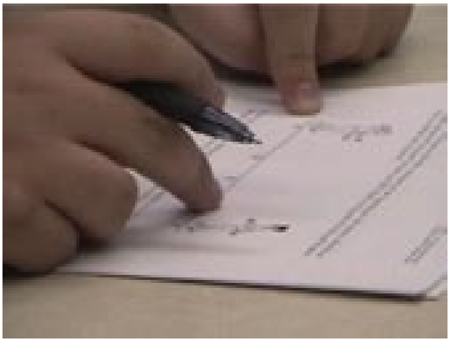
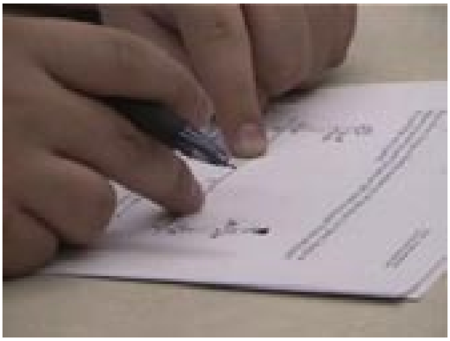


Figure 2b



4. C : Mais…
5. Z : Je dirais…
6. C : Elle approche encore.
7. Z : Elle commence, elle juste dtt, dtt, dtt, dtt, dtt, dtt (*main gauche de P à Q*) dtt, dtt, dtt, dtt, dtt (*main droite de R à S, Figure 3*).

Figure 3

8. C : Ok, so…
9. Z : Elle peut avoir comme, parce que…
10. C : Y peut y avoir, ok minute…
11. Z : Je dirais par ce temps là.
12. C : Un, deux, pis là y commence (*avance les deux mains*). Ok.
13. J : Ça… ça serait pas un S ici? Comme elle, elle arrête…
14. C : *(interrompt)* Il arrête. [...]
15. J : But, y arrête, so y aurait pas juste un comme stall dedans la ligne (*elle fait un mouvement horizontal avec sa main, lentement, Figure 4*), juste un…

Figure 4

16. Z : Non parce qu'elle rapproche encore.
17. Z : Non parce qu'elle rapproche encore.
18. J : Oui, mais après elle, …
19. Z: *(interrompt)* C'est …
20. J: *(continue)* Elle l'attend.
21. Z : *(continue)* C'est pretty much… Non, elle attend pas, elle continue.
22. J : Non, parce que faut qu'elle arrête ici (*indique Q*). Elle peut pas continuer…
23. Z : *(interrompt)* Bien on n'a pas le temps exactement. Geez.
24. J : *(continue)* Jusqu'au moment où lui se rend là.
25. Z : Ça se peut qu'y ait, que c'est juste commencé (*lentement décrit une courbe décroissante devant lui*), comme ça peut aller « ng, nnng » (*coordonne ce son avec une gestuelle qu'il fait avec sa main droite, qui décrit une ligne décroissante puis horizontale, toujours devant lui, Figure 5*). Je comprends.

Figure 5

26. C : Je sais pas. Mais là ça revient à la première, si c'est vraiment comme ça. Si lui y arrête pas… Wow, ok.
27. Z : Ça se peut que c'est comme elle a dit, ça fait comme… et là c'est un S, un petit peu, c'est comme, « da, da, da, da, da, voo-oot ». (*il trace la courbe sur le plan cartésien*)

Symboles et images

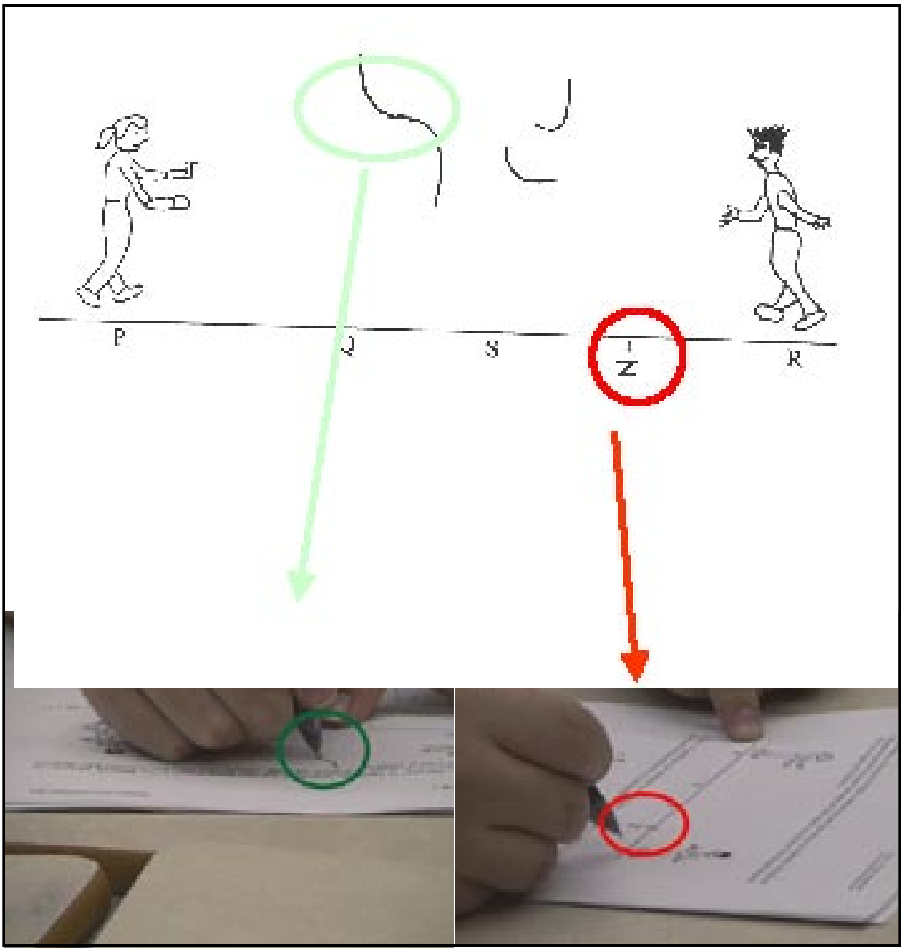
La première grande catégorie de moyens d'objectivation est constituée par les « objets » écrits : ce sont les figures, les dessins, tout symbole ou image en général.

L'activité mathématique que les élèves doivent résoudre repose sur un texte (énoncé du problème), un dessin (Figure 1) et un symbole (plan cartésien); ces trois éléments étant, bien entendu, en rapport étroit les uns avec les autres. De plus, si nous observons le dessin, nous notons la présence d'autres symboles : les lettres qui indiquent les positions des personnages à certaines étapes de leur déplacement.

Lors de l'activité de groupe, les élèves interagissent avec ces éléments écrits et les enrichissent. Par exemple, dans le groupe observé, l'élève noté *Z* dans la transcription introduit une nouvelle lettre (« Z ») sur le dessin pour indiquer la position où Nicolas s'arrête pendant deux secondes (ligne 1 de la transcription et Figure 6 ci-dessous). La lettre Z désigne ainsi symboliquement sur le dessin un évènement précis de la situation spatio-temporelle imaginée et décrite dans le problème mathématique, en objectivant un élément important de la résolution du problème par les élèves.

La Figure 6 représente certaines tentatives des élèves issues de leurs discussions concernant la forme du graphique obtenu par le CBR. En concevant cette activité, nous avions envisagé que les élèves utilisent le plan cartésien (Figure 1); mais les productions écrites indiquent qu'ils ne se sont pas limités à cet espace et qu'ils ont aussi utilisé le dessin fourni. Ce qui, pour nous, constitue deux niveaux de représentation distincts pour décrire la situation/mouvement : le dessin d'une part, et la représentation graphique, de l'autre, sont apparus, lors du processus d'objectivation des élèves, comme étant étroitement liés, voire amalgamés.

Figure 6
Première catégorie de moyens d'objectivation : graphiques et symboles



Langage oral

L'activité langagière est une autre composante essentielle de l'activité des élèves travaillant en groupe. Les énoncés peuvent être de nature et de niveaux différents : constatations, observations, formulation d'hypothèses, argumentation, acceptation ou réfutation d'arguments, etc.

Dans l'extrait ici retenu, l'activité discursive est très intense et diverse : les élèves s'interrompent souvent (lignes 14, 18, 22), parlent en même temps (ligne 5), laissent des phrases incomplètes (lignes 9, 11, 15, 17).

Mais si le discours s'avère un moyen d'objectivation indubitablement essentiel, il reste qu'il ne peut être entièrement compris sans considérer d'autres dimensions du processus communicatif dont, entre autres, les composantes gestuelle, sonore et rythmique que nous allons maintenant examiner.

Gestes

Les vidéos ont permis d'analyser le grand nombre de gestes des élèves. Pour cette activité, les gestes servaient essentiellement à décrire le phénomène physique du mouvement ou la représentation mathématique de celui-ci (c'est-à-dire le graphique). La Figure 7 montre quelques exemples représentatifs:

Figure 7
Exemples de gestes d'élèves comme moyens d'objectivation pour décrire la situation

graphique **mouvement** **graphique**

Dans la photo de gauche, l'élève propose une première hypothèse de graphique, accompagnant son discours d'un geste : avec son crayon, elle dessine, dans l'air, une courbe qui, selon elle, représente la situation décrite dans le problème.

Dans la photo centrale, cette même élève utilise ses mains, encore dans l'espace devant elle, pour représenter le phénomène : le mouvement d'un objet devant un mur. Le mur est, lui aussi, représenté par un geste, plus spécifiquement par sa main gauche placée verticalement.

La dernière photo illustre la formulation d'une seconde hypothèse de graphique. Le garçon représente, avec une main très inclinée, l'importante inclinaison/pente que le graphique devrait, selon lui, présenter. Il accompagne ce geste du mot: « steep ».

Son et rythme

Pour comprendre, pour communiquer et, enfin, pour objectiver, les élèves utilisent toutes les ressources dont ils disposent, tous les artefacts à leur portée et toute leur corporalité. Ainsi, le son et le rythme peuvent devenir également des moyens d'objectivation. Dans l'extrait ci-dessus, on en trouve plusieurs exemples : à la ligne 7, notamment, la séquence « dtt, dtt, dtt, », prononcée en synchronie avec le geste, indique, de façon rythmée, la marche de Mireille. Plus loin, à la ligne 24, les phonèmes « ng, nnng », eux aussi accompagnés d'un geste, font partie de la description du graphique de l'élève noté *Z*. Finalement, ce même élève prononce la séquence « da, da, da, da, da, voo-oot » au fur et à mesure qu'il dessine le graphique sur sa feuille.

Pour simplifier cet exposé, nous avons présenté individuellement différents moyens sémiotiques d'objectivation. Toutefois, il faut souligner qu'ils sont toujours intimement liés et qu'ils apparaissent très souvent de façon synchronisée dans les différentes interactions des élèves. De plus, cette coordination des divers systèmes sémiotiques a essentiellement lieu dans des étapes spécifiques de l'activité mathématique, notamment celles où la connaissance est objectivée : c'est le « nœud sémiotiques »[6].

Conclusion

Dans cet article, nous avons voulu souligner, par quelques exemples, la façon dont les élèves mettent en œuvre différents systèmes sémiotiques afin de donner du sens à certaines activités mathématiques. Cette analyse repose sur une démarche sémiotique-culturelle, selon laquelle le raisonnement mathématique ne peut être saisi par la seule prise en compte des productions écrites (par exemple les formules, les graphiques). Nous avons présenté ces différents « moyens d'objectivation » comme de véritables sources dans la formation des concepts mathématiques complexes et abstraits et avons suggéré qu'ils sont bien souvent des annonces/préludes à un symbolisme plus formel et sophistiqué que les élèves s'approprieront par la suite.

On pourrait objecter que les mots, images, graphiques, symboles mathématiques, gestes, sons, rythmes et toute autre activité corporelle agissent comme des moyens sémiotiques d'objectivation seulement dans les cas d'activités liées au mouvement (déplacement de deux individus dans le temps), comme dans l'exemple choisi. Ce n'est pas le cas. S'ils sont, certes mieux repérables dans des tâches où la composante dynamique est intrinsèque au problème, ils ont été décelés dans d'autres domaines, comme celui des activités classiques de généralisation dans le contexte algébrique[7].

---

[6] L. Radford, S. Demers, J. Guzmán et M. Cerulli, « Calculators, graphs, gestures and the production of meaning », *Proceedings of the 27th PME Conference*, Hawaii, vol. 4, 2003, p. 55-62.

[7] L. Radford, C. Bardini et C. Sabena, « Perceptual semiosis and the microgenesis of algebric generalizations, dans *Proceedings of the fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (à paraître).*

Les analyses menées jusqu'à présent indiquent que ces ressources sont essentielles à l'activité sémiotique d'objectivation : nous les avons appelées « systèmes sémiotiques d'objectivation ». La complexe coordination entre ces divers systèmes semble cruciale dans plusieurs contextes, et joue un rôle primordial dans l'apprentissage. La dimension sémiotique dans les recherches en didactique demeure marginale. Cet article n'est que la pointe d'un iceberg[8].

[8] Cette recherche est subventionnée par le Conseil de recherche en Sciences humaines du Canada (CRSH/SSHRC).